Análisis de Funciomes de Variable Compleja. Grupo U. Curso 2014-15
Práctica 1.
1.-Escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

$$i^n, n \in \mathbb{Z}; \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, n \in \mathbb{N}; \left(\sqrt{3}-i\right)^4; \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5; \left(1+i\sqrt{3}\right)^{20}$$

2.- Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

$$\frac{i}{-2-2i}; \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}; \frac{(1+i)^4}{\sqrt{2}}$$

3.- Demostrar:
a)

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}\,|z|$$

b)

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{con } |z| < 1 \text{ se verifica } \left|\operatorname{Im}(1 - \overline{z} + z^2)\right| < 3$$

4.- Demostrar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \ \forall n \geq 0$$

Si $z^n = 1$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$, probar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$$

Concluir probando la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(n+1/2)\,\theta\right]}{2\sin\theta/2}, \forall\theta \in (0, 2\pi]$$

5.- Probar:
a)

$$|z| < 1 \text{ y } |\alpha| < 1 \text{ implica } \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| < 1$$

b)

$$|z| = 1 \text{ y } |\alpha| < 1 \text{ implica } \left| \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z} \right| = 1$$

6.- Sean $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ con $n \geq 2$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$$

Sea r una recta que pasa por el origen. Probar que para cada i ,$1 \leq i \leq n$, $z_i \in r$ o bien existen dos puntos cada uno de ellos en uno de los dos semiplanos abiertos determinados por r.

7.- Sea $R > 0$ el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$. Determinar el radio de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n \, ; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn} ; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$$

donde $k \geq 1$ es natural.

8.- Demostrar que existe una función entera $u(z)$ definida por $\sum a_n z^n$ tal que $u' = u - 1$ y $u(0) = 2$.

9.-Probar:

$$\text{Si } z \in \mathbb{C} \text{ y } \operatorname{Re} z^n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } z \in \mathbb{R}$$

10.- Probar:

$$\forall m \geq 2, \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

(Indicación: Factorizar $z^m - 1$ para llegar a

$$m = \prod_{k=1}^{m-1} (1 - e^{i2k\pi/m})$$

y evaluar $m.\overline{m}$.

11.- Determinar todos los polinomios armónicos u de la forma

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

y calcular una función $v(x,y)$ tal que $u(x,y) + iv(x.y)$ sea entera.

12.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Sean u y v armónicas en Ω. ¿Bajo que condiciones es armónica $u.v$?

Demostrar que u^2 no puede ser armónica a menos que u sea constante. ¿Para que función $f \in H(\Omega)$ es $|f|^2$ armónica?

13.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f \in H(\Omega)$. Probar: $|f|$ constante en Ω implica f constante.

14.- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f \in H(\Omega)$. Si $f(\Omega)$ esta incluído en una recta, probar que f es constante.

15.- Obtener una fórmula para calcular el argumento principal de un número complejo $z = x + iy$ en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

16.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ series convergentes de números complejos. Probar que si una de ellas es absolutamente convergente entonces su producto de convolución $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,}$ cuyo término general está definido por $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$, es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$$

17.- Estudiar el comportamiento de las series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

en la frontera de su disco de convergencia.

18.- (Lema de inyectividad) Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergente en $D(z_0; r)$. Se supone que

$$|a_1| > \sum_{n \geq 2} n |a_n| r^{n-1}$$

Probar que f es inyectiva en $D(z_0; r)$.

19.- Calcular los radios de convergencia de las series de potencias,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \log n; \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n; \sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^{-n} z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn+h}; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} z^n; \sum_{n=0}^{\infty} (2n)!\,(n!)^{-2}\, z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! n^{-n} z^n; \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}; \sum_{n=0}^{\infty} ((n+a^n)\, z^n$$

20.-Probar que la inversión transforma:

(i) Circunferencias $|z-z_0| = r$ que no pasan por el origen, $|z_0| \neq r$, en circunferencias que no pasan por el origen.

(ii) Circunferencias $|z-z_0| = r$ que pasan por el origen, $|z_0| = r$, en rectas que no pasan por el origen $\operatorname{Re}\{z_0 w\} = 1/2$.

(iii) Rectas $\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta}z\right\} = c, c > 0$, que no pasan por el origen, en circunferencias que pasan por el origen $\left|w - \frac{e^{-i\theta}}{2c}\right| = \frac{1}{2c}$.

(iv) Rectas $\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta}z\right\} = 0$ que pasan por el origen en rectas que pasan por el origen $\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}w\right\} = 0$.